

第3讲 二次函数图象专题（二）加油站

一、二次函数与方程综合

练习1

1. 2017年河北邯郸初三中考二模第16题2分 ★★★

在平面直角坐标系中，已知 $A(2, 4)$ 、 $B(2, -1)$ ，若抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与线段 AB 有交点，且与 y 轴相交于点 C ，则下列四种说法：①当 $k = 0$ 时，抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与 x 轴有唯一公共点；②当 $x > 4$ 时， y 随 x 的增大而增大；③点 C 的纵坐标的最大值为 2；④抛物线与 x 轴的两交点间的距离的最大值为 $\sqrt{6}$ ；其中正确的是（ ）。

A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ②③④

【答案】B

【解析】①把 $k = 0$ 代入 $y = 2(x - 3)^2 + k$ ，得 $y = 2(x - 3)^2$ ，

方程 $2(x - 3)^2 = 0$ 即为 $2x^2 - 12x + 18 = 0$ ，

$\therefore \Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$ ，

$\therefore$ 方程 $2(x - 3)^2 = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2$ 与 x 轴有唯一公共点，

即当 $k = 0$ 时，抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与 x 轴有唯一公共点，故①正确；

② $\because y = 2(x - 3)^2 + k$ 中，

$a = 2 > 0$ ，开口向上，对称轴是直线 $x = 3$ ，

$\therefore$ 当 $x > 3$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x > 4$ 时， y 随 x 的增大而增大，故②正确；

③ $\because$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与线段 AB 有交点，且与 y 轴相交于点 C ，

$\therefore$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 过点 $A(2, 4)$ 时，点 C 的纵坐标最大，

把 $A(2, 4)$ 代入 $y = 2(x - 3)^2 + k$ ，得 $4 = 2(2 - 3)^2 + k$ ，解得 $k = 2$ ，

此时抛物线是 $y = 2(x - 3)^2 + 2$ ，即 $y = 2x^2 - 12x + 20$ ，

此时点 C 的坐标为 $(0, 20)$ ，即点 C 的纵坐标的最大值为 20，故③错误；

④ $\because$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 与线段 AB 有交点，

$\therefore$ 抛物线 $y = 2(x - 3)^2 + k$ 过点 $B(2, -1)$ 时，与 x 轴的两交点间的距离最大，

把 $B(2, -1)$ 代入 $y = 2(x - 3)^2 + k$ ，得 $-1 = 2(2 - 3)^2 + k$ ，解得 $k = -3$ ，

此时抛物线是 $y = 2(x - 3)^2 - 3$ ，

解方程 $2(x - 3)^2 - 3 = 0$ ，得 $x_1 = 3 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ ， $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{6}}{2}$ ，

所以抛物线与 x 轴的两交点间的距离的最大值为 $\left(3 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) - \left(3 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6}$ ，故④正确。

故选：B。

【标注】【能力】运算能力

【知识点】二次函数与坐标轴交点

2. 2021年天津和平区初三中考一模第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a > 0$) 经过点 $(1, 0)$, $(0, -1)$, 其对称轴在 y 轴右侧。

有下列结论：

① $a - b - 1 = 0$ ；

② 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的一个根为 1，另一个根为 $-\frac{1}{a}$ ；

③ $a > 1$ 。

其中，正确结论的个数为 ()。

A. 0

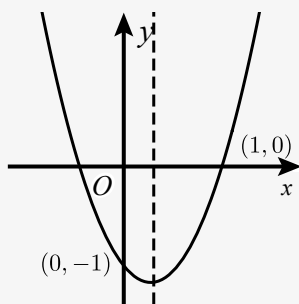
B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】



将 $(0, -1)$ 代入得： $-1 = c$ ，

$$\therefore c = -1,$$

$\therefore y = ax^2 + bx - 1$ ，将 $(1, 0)$ 代入得

$$a + b - 1 = 0, \quad a + b = 1,$$

$$b = 1 - a, \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1-a}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a},$$

$$a > 0 \text{ 且 } \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > 0,$$

$\therefore$ 对称轴在 $0 < x < \frac{1}{2}$ 范围内 $x = 0$ 时，即 $y = ax^2 + bx - 1$ 关于 $x = 0$ 对称时才过 $(-1, 0)$

,

$\therefore x = -1$ 时， $a - b - 1 = 0$ ，但与对称轴在 y 轴右侧矛盾，故①错误；

令 $y = ax^2 + (1-a)x - 1$ 中， $x = -\frac{1}{a}$ 时，

$y = a \times \frac{1}{a^2} + (1-a) \times \left(-\frac{1}{a}\right) - 1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{a} + 1 - 1 = 0$, (不用解, 代入 $x = \frac{-1}{a}$ 看 y 是否 0 即可),
 $\therefore$ 另一个根为 $-\frac{1}{a}$ 成立, 故②正确;
 由对称轴在 y 轴右侧得 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > 0$, $\frac{1}{2a} < \frac{1}{2}$, $a > 1$, 故③正确;
 故正确结论为 2 个, 故选 C.

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

练习2

3. 2016年天津武清区初三中考二模第12题3分 ★★

若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象上有两点, 坐标分别为 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , 其中 $x_1 < x_2$, $y_1 y_2 < 0$, 则下列判断正确的是 ().

- A. $a < 0$
- B. $a > 0$
- C. 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有一根 x_0 满足 $x_1 < x_0 < x_2$
- D. $y_1 < y_2$

【答案】 C

【解析】 $\because x_1 < x_2$, $y_1 y_2 < 0$,

$\therefore$ 两个交点在 x 轴的上方一个, 下方一个,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴有一个交点在这两个点之间,

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 必有一根 x_0 满足 $x_1 < x_0 < x_2$.

a 的正负情况以及 y_1 与 y_2 哪一个是正数哪一个是负数无法判断.

【标注】【题型】图象与系数的关系

4. 2020年天津红桥区初三中考一模第12题3分 ★★

对于一个函数, 当自变量 x 取 a 时, 其函数值 y 也等于 a , 我们称 a 为这个函数的不动点. 若二次函数 $y = x^2 + 2x + c$ (c 为常数) 有两个不相等且都小于 1 的不动点, 则 c 的取值范围是 ().

- A. $c < -3$
- B. $-3 < c < -2$
- C. $-2 < c < \frac{1}{4}$
- D. $c > \frac{1}{4}$

【答案】 C

【解析】 令 $x^2 + 2x + c = x$,

即 $x^2 + x + c = 0$.

由题意知 $\Delta = 1 - 4c > 0$, 得: $c < \frac{1}{4}$,

令 $y = x^2 + x + c$ ，若有 2 个不相等且小于 1 的不动点，
 即 $y = x^2 + x + c$ 与 x 轴有两个小于 1 的交点，
 只需 $x = 1$ 时， $y > 0$ ，
 即 $1 + 1 + c > 0$ ，得： $c > -2$ ，
 综上， c 的取值范围是 $-2 < c < \frac{1}{4}$ 。
 故选 C。

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

5. 2020年天津河西区初三中考二模第12题3分 ★★

在平面直角坐标系内，抛物线 $y = ax^2 - x + 1$ ($a \neq 0$) 与线段 AB 有两个不同的交点，其中点 $A(-1, 0)$ ，点 $B(1, 1)$ 。有下列结论：

① 直线 AB 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ；② 方程 $ax^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ 两个不相等的实数根；③ a 的取值范围是 $a \leq -2$ 或 $1 \leq a < \frac{9}{8}$ 。

其中，正确结论的个数为 ()。

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】D

【解析】① 设 AB 解析式为 $y = kx + b$ ，代入 A, B ，

$$\begin{cases} -k + b = 0 \\ k + b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$\therefore AB$ 解析式为 $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ，故①正确；

② $\because$ 抛物线 $y = ax^2 - x + 1$ ($a \neq 0$) 与 $AB: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 有两个不同的交点，

$$\therefore ax^2 - x + 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2},$$

即 $ax^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$ 有两个不相等的实数根，故②正确；

③ 1) 当 $a < 0$ 时，

$$\begin{cases} a + 1 + 1 \leq 0 \\ a - 1 + 1 \leq 1 \end{cases}, \text{解得 } a \leq -2,$$

2) 当 $a > 0$ 时，

$$\begin{cases} \Delta = \frac{9}{4} - 2a > 0 \\ a + 1 + 1 \geq 0 \\ a - 1 + 1 \geq 1 \end{cases}, \text{解得 } 1 \leq a < \frac{9}{8},$$

综述 $a \leq -2$ 或 $1 \leq a < \frac{9}{8}$ 。故③正确。

故选 D。

【标注】【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

练习3

6. 2018年天津中考真题第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a 、 b 、 c 为常数, $a \neq 0$) 经过点 $(-1, 0)$, $(0, 3)$, 其对称轴在 y 轴右侧, 有下列结论:

- ① 抛物线经过点 $(1, 0)$;
- ② 方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 有两个不相等的实数根;
- ③ $-3 < a + b < 3$.

其中, 正确结论的个数为 ().

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 C

【解析】 $\because y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, 0)$, $(0, 3)$

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\therefore a - b = -3,$$

$$\therefore b = a + 3,$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = a + b + c = -3 + b + b + 3 = 2b,$$

$$\because \text{对称轴 } -\frac{b}{2a} > 0,$$

$$\therefore b \neq 0,$$

$$\therefore \text{不经过 } (1, 0),$$

$$\therefore ax^2 + bx + c = 2,$$

$$\therefore ax^2 + bx + 1 = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4a = (a + 3)^2 - 4a = a^2 + 2a + 9 = (a + 1)^2 + 8 > 0,$$

$$\therefore \text{有两个不相等的实数根},$$

$$\therefore a + b = 2b - 3, \quad b > 0,$$

$$\therefore 2b - 3 > -3,$$

$$\therefore a + b > -3,$$

$$\therefore a + b = 2a + 3,$$

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore 2a + 3 < 3,$$

$$\therefore a + b < 3,$$

$$\therefore -3 < a + b < 3.$$

【标注】【知识点】利用二次函数解不等式问题

7. 2019年天津河西区初三中考一模第12题3分 ★★

已知抛物线 $y = (x + a)(x - a - 1)$ (a 为常数 $a \neq 0$) . 有下列结论 :

① 抛物线的对称轴为 $x = \frac{1}{2}$;

② 方程 $(x + a)(x - a - 1) = 1$ 有两个不相等的实数根 ;

③ 抛物线上有两点 $P(x_0, m)$, $Q(1, n)$, 若 $m < n$, 则 $0 < x_0 < 1$.

其中 , 正确结论的个数为 () .

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 D

【解析】 ① $y = (x + a)(x - a - 1)$

即 : $y = x^2 - x - a^2 - a$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$.

故此选项正确 .

② 方程可化为 ; $x^2 - x - a^2 - a - 1 = 0$,

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-a^2 - a - 1) = 1 + 4a^2 + 4a + 4 = (2a + 1)^2 + 4 > 0$,

$\therefore$ 方程 $(x + a)(x - a - 1) = 1$ 有两个不相等的实数根 .

故此选项正确 .

③ 分别将 $P(x_0, m)$, $Q(1, n)$ 代入抛物线 ,

$y = (x + a)(x - a - 1)$ 得 :

$m = x_0^2 - x_0 - a^2 - a$,

$n = 1^2 - 1 - a^2 - a = -a^2 - a$,

$\because m < n$,

$\therefore x_0^2 - x_0 - a^2 - a < -a^2 - a$,

$\therefore x_0^2 - x_0 < 0$,

$\therefore x_0(x_0 - 1) < 0$,

$\because x_0 - (x_0 - 1) = x_0 - x_0 + 1 = 1 > 0$,

$\therefore x_0 > x_0 - 1$,

$\therefore x_0 > 0$ 且 $x_0 - 1 < 0$,

即 : $x_0 > 0$ 且 $x_0 < 1$,

故选 D .

【标注】 【知识点】 利用二次函数解不等式问题

8. 2021年天津河西区初三中考零模第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，与 y 轴的交点 B 在 $(0, 3)$ 和 $(0, 4)$ 之间（包含这两个点）。有下列结论：

① $abc < 0$ ；

② 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = 2a$ 有两个不等的实数根；

③ $-\frac{4}{3} \leq a \leq -1$ ，

其中，正确结论的个数是（ ）。

A. 0

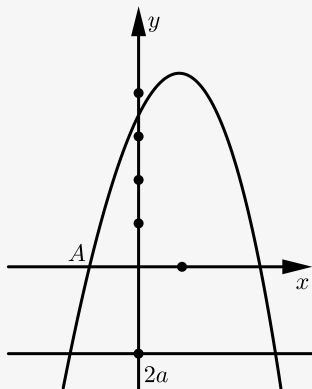
B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 D

【解析】 由题可大致图象为下图，



$\therefore$ 易得 $a < 0$ ， $c > 0$ ，

$\therefore$ 对称轴 $-\frac{b}{2a} = 1 > 0$ ，

$\therefore b = -2a > 0$ ，

$\therefore abc < 0$ ，故①正确；

又 $\because a$ 为负数，

$\therefore 2a$ 为负，

则 $ax^2 + bx + c = 2a$ 一定有两个不等实数根，故②正确；

$\therefore A$ 在图象上，

$\therefore 0 = a - b + c$ ，

又 $\because b = -2a$ ，

$\therefore 0 = a + 2a + c = 3a + c \Rightarrow c = -3a$ ，

$\therefore 3 \leq c \leq 4 \Rightarrow 3 \leq -3a \leq 4$ ，

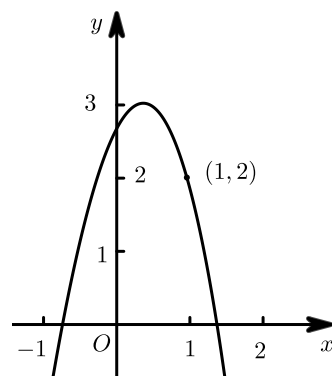
则 $-\frac{4}{3} \leq a \leq -1$ ，故③正确，

综上①②③正确，故选 D。

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 的图象经过点 $(1, 2)$ ，与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1, x_2 ，其中 $-1 < x_1 < 0, 1 < x_2 < 2$ ，则下列结论：

① $2a + b > 0$ ；② $a < -1$ ；③关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c + k^2 = 0$ (k 为任意实数) 没有实数根；其中正确的有 ()。



A. 0个

B. 1个

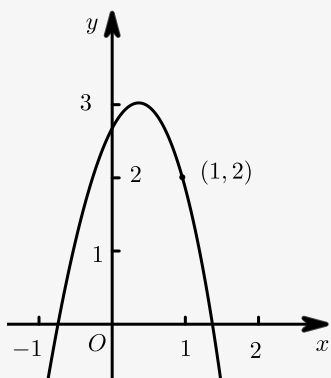
C. 2个

D. 3个

【答案】 B

【解析】 $\because y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$)，过 $(1, 2)$ ，

$$\therefore a + b + c = 2 \text{ ①},$$



由图可知 $x = -1$ 和 2 时， $y < 0$ ，

$$\therefore a - b + c < 0 \text{ ②}, \quad 4a + 2b + c < 0 \text{ ③},$$

$$\text{①} + \text{②} \quad 2a + 2c < 2 \text{ ④},$$

$$\text{③} - \text{①} \times 2, \quad 2a - c < -4,$$

$$\therefore 4a - 2c < -8 \text{ ⑤},$$

$$\text{④} + \text{⑤} \therefore 6a < -6,$$

$$\therefore a < -1,$$

$$\because 0 < -\frac{b}{2a} < 1, \quad a < 0,$$

$$\therefore b > 2a,$$

$$\therefore 2a + b < 0,$$

$y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = -k^2$ 一定有两个交点，

$\therefore ax^2 + bx + c + k^2 = 0$ 一定有两个不等实根，

∴①正确，②③错误．

【标注】【知识点】关于a、b、c代数式的取值问题

10. 2021年天津红桥区初三中考零模第12题3分 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	...	-5	-4	-2	0	2	...
y	...	6	0	-6	-4	6	...

有下列结论：① $a > 0$ ；②当 $x = -2$ 时，函数的最小值为 -6 ；③若点 $(-8, y_1)$ ，点 $(8, y_2)$ 在该二次函数图象上，则 $y_1 < y_2$ ；④方程 $ax^2 + bx + c = -5$ 有两个不相等的实数根．其中，正确结论的个数是 () ．

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】由抛物线过点 $(-5, 6)$ 、 $(2, 6)$ 、 $(0, -4)$ ，可得：
$$\begin{cases} 25a - 5b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ c = -4 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$$

∴二次函数的解析式是 $y = x^2 + 3x - 4$ ，

∴ $a = 1 > 0$ ，故①正确；

当 $x = -\frac{3}{2}$ 时， y 有最小值 $-\frac{25}{4}$ ，故②错误；

若点 $(-8, y_1)$ ，点 $(8, y_2)$ 在二次函数图象上，则 $y_1 = 36$ ， $y_2 = 84$ ，

∴ $y_1 < y_2$ ，故③正确；

当 $y = -5$ 时，方程 $x^2 + 3x - 4 = -5$ 即 $x^2 + 3x + 1 = 0$ ，

∴ $\Delta = 3^2 - 4 = 5 > 0$ ，

∴方程 $ax^2 + bx + c = -5$ 有两个不相等的实数根，故④正确；

综上，正确的结论是：①③④．

故答案为 C．

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

练习4

11. 2019~2020学年4月江苏南京鼓楼区金陵汇文学校初三下学期月考第13题2分 ★★

“如果二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴有两个公共点，那么一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根．”请根据你对这句话的理解，解决下面问题：若 m 、 n ($m < n$) 是关于 x 的方程 $1 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两根，且 $a < b$ ，则 a 、 b 、 m 、 n 的大小关系是 _____ ．

【答案】 $m < a < b < n$

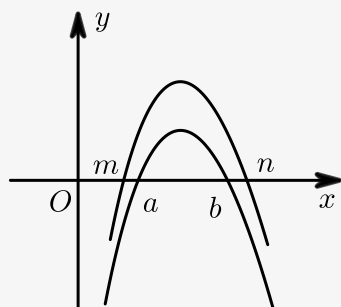
【解析】 $\because m, n (m < n)$ 是关于 x 的方程 $1 - (x - a)(x - b) = 0$ 的两根，

$\therefore$ 二次函数 $y = -(x - a)(x - b) + 1$ 的图象与 x 轴交于点 $(m, 0)$ 、 $(n, 0)$ ，

$\therefore$ 将 $y = -(x - a)(x - b) + 1$ 的图象往下平移一个单位可得二次函数 $y = -(x - a)(x - b)$ 的图象，

二次函数 $y = -(x - a)(x - b)$ 的图象与 x 轴交于点 $(a, 0)$ 、 $(b, 0)$ 。

画出两函数图象，观察函数图象可知： $m < a < b < n$ 。



【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

12. 2020~2021学年福建厦门思明区厦门外国语学校初三上学期期中第10题 ★★

已知二次函数 $y = (x - p)(x - q) - 2$ ，若 m, n 是关于 x 的方程 $(x - p)(x - q) - 2 = 0$ 的两个根，则实数 m, n, p, q 的大小关系可能是 ()。

- A. $m < p < q < n$ B. $m < p < n < q$ C. $p < m < n < q$ D. $p < m < q < n$

【答案】 A

【解析】 $\because$ 二次函数 $y = (x - p)(x - q) - 2$ ，

$\therefore$ 该函数开口向上，当 $x = p$ 或 $x = q$ 时， $y = -2$ ，

$\therefore m, n$ 是关于 x 方程 $(x - p)(x - q) - 2 = 0$ 的两个根，

$\therefore y = (x - p)(x - q) - 2$ ，当 $x = m$ 或 $x = n$ 时， $y = 0$ ，

$\therefore p, q$ 一定处在 m, n 中间。

故选 A。

【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

13. ★★

已知二次函数 $y = (x - a)(x - b) - \frac{1}{2} (a < b)$ ，且 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是方程 $(x - a)(x - b) - \frac{1}{2} = 0$ 的两个根，则实数 a, b, x_1, x_2 的大小关系为 ()。

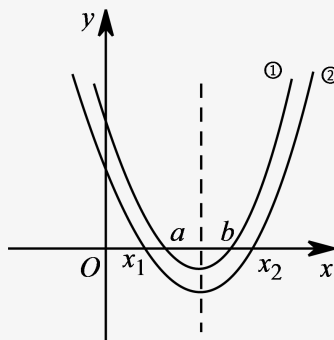
- A. $a < x_1 < b < x_2$ B. $a < x_1 < x_2 < b$ C. $x_1 < a < x_2 < b$ D. $x_1 < a < b < x_2$

【答案】D

【解析】设 $y' = (x-a)(x-b)$ 的大致图象如图所示，抛物线①，它与 x 轴的交点坐标的横坐标依次为 a 、 b ，

$\therefore y = (x-a)(x-b) - \frac{1}{2}$ 是由抛物线①向下平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度得到的．如图中的抛物线②，它与 x 轴的交点横坐标分别是 x_1 、 x_2 ，

$\therefore$ 由图象得 $x_1 < a < b < x_2$ ．



【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

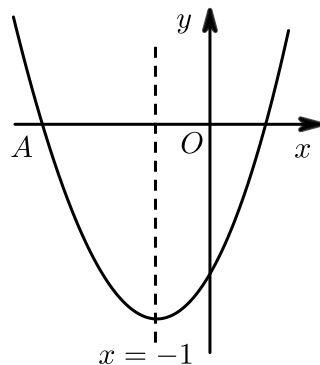
练习5

14. 2019年天津红桥区初三中考二模第12题3分 ★★★

如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-3, 0)$ ，其对称轴为直线 $x = -1$ ，

有下列结论：① $abc < 0$ ；② $a - b - 2c > 0$ ；③关于 x 的方程 $ax^2 + (b-m)x + c = m$ 有两个不相等的实数根；④若 $P(-5, y_1)$ ， $Q(m, y_2)$ 是抛物线上两点，且 $y_1 > y_2$ ，则实数 m 的取值范围是 $-5 < m < 3$ ．

其中正确结论的个数是（ ）．



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】D

【解析】由图可知 $a > 0$ ， $c < 0$ ，

对称轴为 $x = -1$ ，

$$x = -\frac{b}{2a} = -1$$

$\therefore b = 2a > 0$ ；

① $abc < 0$ ，正确；

② $y = ax^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-3, 0)$,

$$\therefore 9a - 3b + c = 0 ,$$

$$\therefore 3a + c = 0 , \text{ 即 } c = -3a ,$$

$$\therefore y = ax^2 + 2ax - 3a ,$$

$$a - b - 2c = a - 2a + 6a = 5a > 0 ,$$

②正确 ;

$$\textcircled{3} \quad ax^2 + (b - m)x + c = m , \text{ 可化为 } ax^2 + (2a - m)x - 3a = m ,$$

$$\therefore ax^2 + (2a - m)x - 3a - m = 0 ,$$

$$\Delta = (2a - m)^2 + 4a(3a + m) = 16a^2 + m^2 > 0 ,$$

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2 + (b - m)x + c = m$ 有两个不相等的实数根 ;

③正确 ;

④ $P(-5, y_1)$, $Q(m, y_2)$ 是抛物线上两点 , 且 $y_1 > y_2$,

$\therefore x = -1$ 是对称轴 ,

$\therefore$ 与 P 点 y 值相等的点为 $(3, y_1)$,

$$Qy_1 > y_2$$

$$\therefore -5 < m < 3 ;$$

④正确 ;

故选 D .

【标注】【能力】分析和解决问题能力

【能力】运算能力

【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

15. 2015年天津北辰区初三中考一模第12题3分 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 中, x 与 y 的部分对应值如下表 :

x	$\dots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\dots$	
y	$\dots$	-3.5	-1	0.5	1	0.5	-1	-3.5	$\dots$	

有下列结论 :

① 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 有最大值 , 且最大值为 1 .

② 若 x_0 满足 $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, 则 $2 < x_0 < 3$ 或 $-1 < x_0 < 0$.

③ 若方程 $ax^2 + bx + c + m = 0$ 有两个不等的实数根 , 则 $m < -1$

④ 对于任意实数 m , 当 $m \neq 1$ 时 , 有 $m(am + b) < \frac{1}{2}$

其中 , 正确结论的个数是 () .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】把表格数据代入函数中，

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0.5 = c, (0, 0.5).$$

$$1 = a + b + 0.5, (1, 1).$$

$$0.5 = 4a + 2b + 0.5, (2, 0.5).$$

$$\begin{cases} a + b = 0.5 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{1}{2}.$$

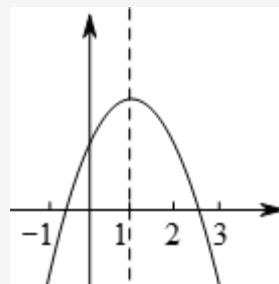
$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}.$$

①当 $x = 1$ 时， $y_{\max} = 1$.

②如图，令函数等于 0，则 $-1 < x < 0, 2 < x < 3$.

③将函数向上或向下平移 m 个单位， $m < -1$ 则向下平移大于 1 个单位，即函数和 x 轴没有交点，没有实数根 .

$$\begin{aligned} & \textcircled{4} m \left(-\frac{1}{2}m + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2}m^2 + m \\ &= -\frac{1}{2}(m^2 - 2m) \\ &= -\frac{1}{2}(m^2 - 1) + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



【标注】【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

16. 2016年山东济南长清区初三中考一模第15题3分 ★★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数，且 $a \neq 0$) 中的 x 与 y 的部分对应值如下表：

x	-1	0	1	3
y	-1	3	5	3

下列结论，其中正确的有 () 个 .

- (1) $ac < 0$;
- (2) 当 $x > 1$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小；
- (3) $x = 3$ 是方程 $ax^2 + (b - 1)x + c = 0$ 的一个根；
- (4) 当 $-1 < x < 3$ 时， $ax^2 + (b - 1)x + c > 0$.

A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】B

【解析】(1) 由图表中数据可得出： $x = 1$ 时， $y = 5$ ，所以二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向下， $a < 0$ ；又 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，所以 $c = 3 > 0$ ，所以 $ac < 0$ ，故 (1) 正确；

(2) $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 开口向下, 且对称轴为 $x = \frac{0+3}{2} = 1.5$,

$\therefore$ 当 $x \geq 1.5$ 时, y 的值随 x 值的增大而减小, 故 (2) 错误;

(3) $\because x = 3$ 时, $y = 3$,

$\therefore 9a + 3b + c = 3$,

$\because c = 3$,

$\therefore 9a + 3b + 3 = 3$,

$\therefore 9a + 3b = 0$,

$\therefore 3$ 是方程 $ax^2 + (b-1)x + c = 0$ 的一个根, 故 (3) 正确;

(4) $\because x = -1$ 时, $ax^2 + bx + c = -1$,

$\therefore x = -1$ 时, $ax^2 + (b-1)x + c = 0$,

$\because x = 3$ 时, $ax^2 + (b-1)x + c = 0$, 且函数有最大值,

$\therefore$ 当 $-1 < x < 3$ 时, $ax^2 + (b-1)x + c > 0$, 故 (4) 正确.

故选: B.

【标注】【能力】运算能力

【能力】抽象概括能力

【思想】数形结合思想

【思想】函数思想

【知识点】二次函数一般式

【知识点】二次函数与一元二次方程的关系

【知识点】利用二次函数解不等式问题

【方法】待定系数法

【方法】图象法

17. 2018~2019学年天津和平区初三上学期期末第12题3分 ★★★

已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 与 y 轴的交点在 $(0, 2)$, $(0, 3)$ 之间 (包含端点), 顶点坐标为 $(1, n)$, 则下列结论:

① $4a + 2b < 0$.

② $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$.

③ 对于任意实数 m , $a + b \geq am^2 + bm$ 总成立.

④ 关于 x 的方程 $ax^2 + bx + c = n - 1$ 有两个不相等的实数根.

其中结论正确的个数为 ().

A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】①∵顶点为 $(1, n)$,

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = 1 ,$$

$$\therefore b = -2a ,$$

$$\therefore 2a + b = 0 ,$$

$$\therefore 4a + 2b = 0 ,$$

故①错 .

②∵与 y 轴交点在 $(0, 2)$, $(0, 3)$ 之间 ,

$$\therefore 2 \leq c \leq 3 ,$$

∵抛物线与 x 轴交于 $A(-1, 0)$,

对称轴为直线 $x = 1$,

∴与 x 轴另一交点为 $B(3, 0)$,

$$\therefore ax^2 + bx + c = 0 \text{ 的解为 } x_1 = -1 , x_2 = 3 ,$$

$$x_1 \cdot x_2 = -3 ,$$

$$\therefore \frac{c}{a} = -3 ,$$

$$c = -3a ,$$

$$2 \leq -3a \leq 3 ,$$

$$-1 \leq a \leq -\frac{2}{3} ,$$

故②正确 .

③∵顶点坐标为 $(1, n)$, 开口向下 ,

∴当 $x = 1$ 时 , 函数值最大 , 最大值为 n ,

$$n = a + b + c ,$$

∴当 $x = m$ 时 , $y = am^2 + bm + c \leq n$,

$$\text{即 } am^2 + bm + c \leq a + b + c$$

$$am^2 + bm \leq a + b$$

∴③正确 .

④∵顶点坐标为 $(1, n)$,

∴直线 $y = n$ 与抛物线有一个交点 ,

又∵直线 $y = n - 1$ 在 $y = n$ 下方 ,

∴直线 $y = n - 1$ 必与抛物线有两个交点 ,

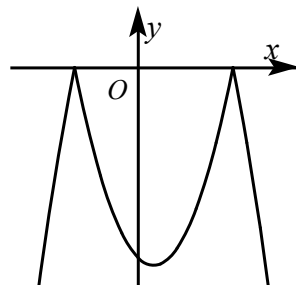
∴ $ax^2 + bx + c = n - 1$ 有两个不等实根 ,

故④正确 .

【标注】【知识点】二次函数与坐标轴交点

18. 2019~2020学年10月安徽合肥蜀山区合肥市琥珀中学初三上学期月考第10题4分 ★★★

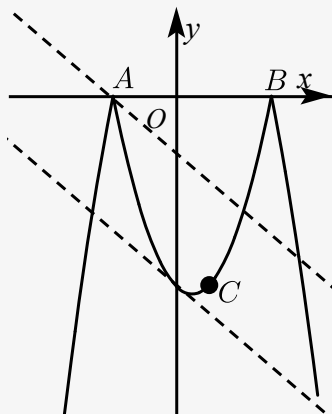
已知二次函数 $y = -x^2 + x + 6$ 及一次函数 $y = -x + m$ ，将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方，图象的其余部分不变，得到一个新函数（如图所示），当直线 $y = -x + m$ 与新图象有 4 个交点时， m 的取值范围是（ ）。



- A. $-6 < m < -2$ B. $-\frac{25}{4} < m < 2$ C. $-2 < m < 3$ D. $-\frac{25}{4} < m < 3$

【答案】A

【解析】如图，



当 $y = 0$ 时， $-x^2 + x + 6 = 0$ ，解得 $x_1 = -2$ ， $x_2 = 3$ ，则 $A(-2, 0)$ ， $B(3, 0)$ 。

将该二次函数在 x 轴上方的图象沿 x 轴翻折到 x 轴下方的部分图象的解析式为：

$$y = (x + 2)(x - 3)，$$

$$\text{即 } y = x^2 - x - 6 \quad (-2 \leq x \leq 3)，$$

当直线 $y = -x + m$ 经过点 $A(-2, 0)$ 时， $2 + m = 0$ ，解得 $m = -2$ ；

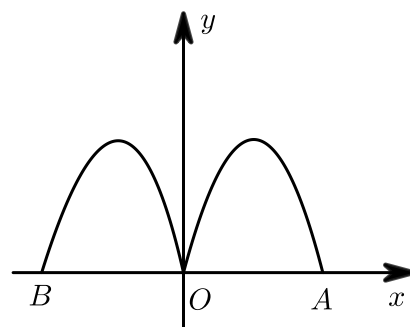
当直线 $y = -x + m$ 与抛物线 $y = x^2 - x - 6$ ($-2 \leq x \leq 3$) 有唯一公共点时，方程 $x^2 - x - 6 = -x + m$ 有相等的实数解，解得 $m = -6$ 。

所以当直线 $y = -x + m$ 与新图象有 4 个交点时， m 的取值范围为： $-6 < m < -2$ 。

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

19. 2019~2020学年河北唐山丰南区初三上学期期中第16题3分 ★★★

如图，抛物线 $y = -2x^2 + 4x$ 与 x 轴交于点 O 、 A ，把抛物线在 x 轴及其上方的部分记为 C_1 ，将 C_1 以 y 轴为对称轴作轴对称得到 C_2 ， C_2 与 x 轴交于点 B ，若直线 $y = x + m$ 与 C_1 ， C_2 共有 3 个不同的交点，则 m 的取值范围是（ ）。



A. $0 < m < \frac{9}{8}$

B. $\frac{9}{8} < m < \frac{25}{8}$

C. $0 < m < \frac{25}{8}$

D. $m < \frac{9}{8}$ 或 $m < \frac{25}{8}$

【答案】 A

【解析】 令 $y = -2x^2 + 4x = 0$,

解得 $x = 0$ 或 $x = 2$,

则点 $A(2, 0)$, $B(-2, 0)$,

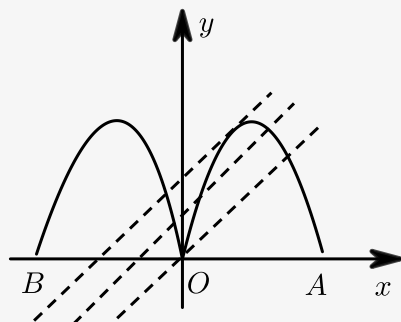
$\therefore C_1$ 与 C_2 关于 y 轴对称,

$$C_1: y = -2x^2 + 4x = -2(x-1)^2 + 2,$$

$$\therefore C_2 \text{ 解析式为 } y = -2(x+1)^2 + 2 = -2x^2 - 4x \quad (-2 \leq x \leq 0),$$

当 $y = x + m$ 与 C_2 仅有一个交点时,

如图所示,



$$\text{令 } y = x + m = y = -2x^2 + 4x,$$

$$\text{即 } 2x^2 - 3x + m = 0,$$

$$\Delta = -8m + 9 = 0,$$

$$\text{解得 } m = \frac{9}{8},$$

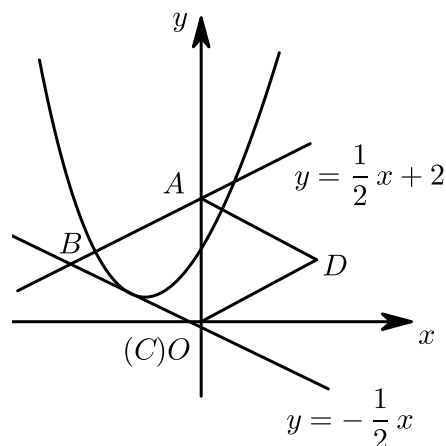
当 $y = x + m$ 过原点时, $m = 0$,

$\therefore$ 当 $0 < m < \frac{9}{8}$ 时直线 $y = x + m$ 与 C_1 , C_2 共有 3 个不同的交点.

故选: A.

【标注】 【知识点】 动直线 (线段) 与定抛物线交点问题

如图，直线 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 与 y 轴交于点 A ，与直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 交于点 B ，以 AB 为边向右做菱形 $ABCD$ ，点 C 恰与原点 O 重合，抛物线 $y = (x - h)^2 + k$ 的顶点在直线 $y = -\frac{1}{2}x$ 上移动，若抛物线与菱形的边 AB 、 BC 都有公共点，则 h 的取值范围是（ ）。



- A. $-2 \leq h \leq \frac{1}{2}$ B. $-2 \leq h \leq 1$ C. $-1 \leq h \leq \frac{3}{2}$ D. $-1 \leq h \leq \frac{1}{2}$

【答案】 A

【解析】

$\therefore$ 将 $y = \frac{1}{2}x + 2$ 和 $y = -\frac{1}{2}x$ 联立得 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 点 B 坐标为 $(-2, 1)$ ，

由抛物线的解析式可知抛物线的顶点坐标为 (h, k) ，

$\therefore$ 将 $x = h$ ， $y = k$ ，代入 $y = -\frac{1}{2}x$ 得： $k = -\frac{1}{2}h$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = (x - h)^2 - \frac{1}{2}h$ ，

如图 1 所示：当抛物线经过点 C 时，

将 $C(0, 0)$ 代入 $y = (x - h)^2 - \frac{1}{2}h$ 得： $h^2 - \frac{1}{2}h = 0$ ，解得： $h_1 = 0$ （舍去）， $h_2 = \frac{1}{2}$ ，

如图 2 所示：当抛物线经过点 B 时，

将 $B(-2, 1)$ 代入 $y = (x - h)^2 - \frac{1}{2}h$ 得： $2h^2 + 7h + 6 = 0$ ，解得： $h_1 = -\frac{3}{2}$ （舍去），

$h_2 = -2$ ，

综上所述， h 的范围是 $-2 \leq h \leq \frac{1}{2}$ 。

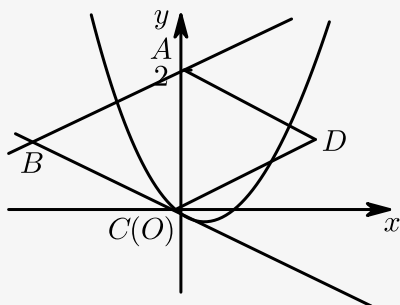


图 1

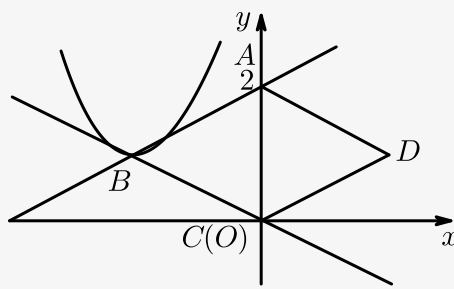


图 2

【标注】 【知识点】 二次函数与几何图形交点问题

二、二次函数与不等式综合

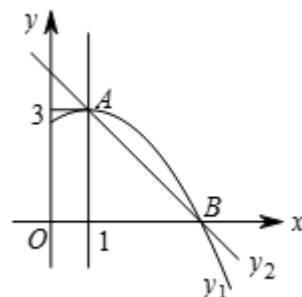
练习7

21. 2016年天津河北区初三中考一模第12题3分 ★★★

如图是抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分, 抛物线的顶点坐标 $A(1, 3)$, 与 x 轴的一个交点为 B , 直线 $y_2 = mx + n$ ($m \neq 0$) 经过 A, B 两点, 下列结论:

- ① 当 $x < 1$ 时, 有 $y_1 < y_2$.
- ② $a + b + c = m + n$.
- ③ $b^2 - 4ac = -12a$.
- ④ 若 $m - n = -5$, 则 B 点坐标为 $(4, 0)$.

其中正确的是 ().



A. ①

B. ①②

C. ①②③

D. ①②③④

【答案】 D

【解析】 ①由图象可知, 当 $x < 1$ 时, 抛物线图象在直线图象的下方,

即 $y_1 < y_2$, 故正确.

②把 $A(1, 3)$ 代入 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), 得: $a + b + c = 3$,

代入 $y_2 = mx + n$ ($m \neq 0$), 得: $m + n = 3$,

$\therefore a + b + c = m + n$, 故正确.

③ $\because$ 抛物线的顶点坐标 $A(1, 3)$,

$$\therefore \frac{4ac - b^2}{4a} = 3,$$

$\therefore b^2 - 4ac = -12a$, 故正确.

④ $\because m + n = 3, m - n = -5$,

$$\therefore m = -1, n = 4,$$

代入到 $y_2 = mx + n$ ($m \neq 0$), 即: $y_2 = -x + 4$,

$$\therefore -x + 4 = 0,$$

$$\therefore x = -4,$$

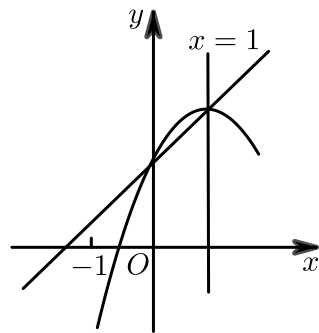
即 B 点坐标为 $(4, 0)$, 故正确.

综上所述：①②③④正确．

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

22. 2018年天津南开区初三中考二模第12题3分 ★★★

如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的顶点和抛物线与 y 轴的交点在一次函数 $y = kx + 1 (k \neq 0)$ 的图象上，它的对称轴是 $x = 1$ ，有以下四个结论：① $abc > 0$ ．② $a < -\frac{1}{3}$ ．③ $a = -k$ ．④当 $0 < x < 1$ 时， $ax + b > k$ ，其中正确的结论有（ ）．



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】B

【解析】∵二次函数开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

∵对称轴在 y 轴右侧，

$$\therefore b > 0,$$

∵抛物线与一次函数交于 y 轴上同一点，

$$\therefore c = 1,$$

∴ $abc < 0$ ，即①错误．

∵对称轴 $x = 1$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1, \text{ 即 } b = -2a,$$

当 $x = -1$ 时， $y = a - b + c < 0$ ，

$$\therefore a - (-2a) + 1 < 0,$$

$$3a < -1,$$

$$\therefore a < -\frac{1}{3},$$

∵抛物线顶点 $(1, a + b + 1)$ 在一次函数 $y = kx + 1$ 上，

$$\therefore k + 1 = a + b + 1,$$

$$\therefore a + b = k,$$

$$a - 2a = k,$$

$$-a = k,$$

$$\therefore a = -k,$$

$\therefore$ ③正确.

令 $y = 0$, 有 $kx + 1 = 0$,

$$x = -\frac{1}{k} = \frac{1}{a},$$

$$\therefore \frac{1}{a} < -1,$$

$$\therefore a > -1,$$

$$\therefore -1 < a < -\frac{1}{3},$$

$\therefore$ ②错误.

$\therefore$ 当 $0 < x < 1$ 时, $ax^2 + bx + c > kx + 1$,

$$ax^2 + bx + 1 > kx + 1,$$

$$ax^2 + bx > kx,$$

$$\therefore x > 0,$$

$$\therefore ax + b > k,$$

$\therefore$ ④正确,

$\therefore$ 正确的有 2 个.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数的交点

练习8

23. 2017~2018学年天津天津外国语大学附属外国语学校初三期中第10题3分 ★★★

函数 $y = x^2 + bx + c$ 与 $y = x$ 的图像如图所示, 有以下结论:

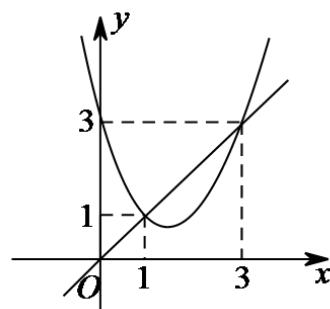
① $b^2 - 4c > 0$;

② $b + c = 0$;

③ $2b + c + 3 = 0$;

④当 $1 < x < 3$ 时, $x^2 + (b - 1)x + c < 0$.

正确的选项有 () 个.



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 B

【解析】①项，由图像可知 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ，故错误；

②项，当 $x = 1$ 时， $1 + b + c = 1$ ， $b + c = 0$ ，故选项正确；

③项，当 $x = 3$ 时， $9 + 3b + c = 3$ ，整理得 $3b + c + 6 = 0$ ，又 $\because b + c = 0$ ，

$\therefore$ 相减得， $2x + 6 = 0$ ， $2b = -6$ ，

$\therefore 2b + c + 3 = -6 + 3 + 3 = 0$ ，故③正确；

④项，当 $1 < x < 3$ 时， $x > x^2 + bx + c$ ，即 $x^2 + (b - 1)x + c < 0$ ，故选项正确。

$\therefore$ 有三项正确。

【标注】【题型】图象与系数的关系

24. 2019~2020学年天津西青区初三上学期期末第12题3分 ★★

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 的自变量 x 与函数值 y 的部分对应值如下表：

x	$\dots$	-1	0	1	3	$\dots$
$y = ax^2 + bx + c$	$\dots$	-1	3	5	3	$\dots$

有下列结论：

① $ac < 0$ ；② $x = 3$ 是方程 $ax^2 + (b - 1)x + c = 0$ 的一个根；

③ 当 $x > 1$ 时， y 的值随 x 值的增大而减小；④ 当 $-1 < x < 3$ ， $ax^2 + (b - 1)x + c > 0$ 。

其中，正确结论的个数是 ()。

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】B

【解析】 $\because x = -1$ 时 $y = -1$ ， $x = 0$ 时， $y = 3$ ， $x = 1$ 时， $y = 5$ ，

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = -1 \\ c = 3 \\ a + b + c = 5 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x^2 + 3x + 3,$$

$\therefore ac = -1 \times 3 = -3 < 0$ ，故①正确；

$$\text{对称轴为直线 } x = -\frac{3}{2 \times (-1)} = \frac{3}{2},$$

所以，当 $x > \frac{3}{2}$ ， y 的值随 x 值的增大而减小，故③错误；

$$\text{方程为 } -x^2 + 2x + 3 = 0,$$

$$\text{整理得， } x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$\text{解得 } x_1 = -1, x_2 = 3,$$

所以，3 是方程 $ax^2 + (b - 1)x + c = 0$ 的一个根，正确，故②正确；

$-1 < x < 3$ 时， $ax^2 + (b - 1)x + c > 0$ 正确，故④正确；

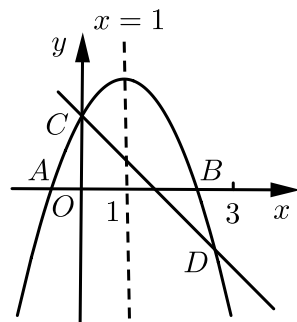
综上所述，结论正确的是①②④。

故选 B。

练习9

25. 2020~2021学年12月浙江杭州西湖区杭州民办东方中学初三上学期月考第9题3分 ★★★

如图所示，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x = 1$ 。直线 $y = -x + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 C, D 两点， D 点在 x 轴下方且横坐标小于 3，则下列结论：① $a - b + c < 0$ ；② $2a + b + c > 0$ ；③ $x(ax + b) \leq a + b$ ；④ $a < -1$ 。其中正确的有（ ）。



A. ①②③

B. ①③④

C. ①②④

D. ①②③④

【答案】D

【解析】∵ 抛物线与 x 轴的一个交点在点 $(3, 0)$ 左侧，

而抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，

∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点在点 $(-1, 0)$ 右侧，

∴ 当 $x = -1$ 时， $y < 0$ ，

∴ $a - b + c < 0$ ，所以①正确；

∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，

∴ $c > 0$ ，

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$ ，

∴ $b = -2a$ ，

∴ $2a + b + c = 2a - 2a + c = c > 0$ ，所以②正确；

∵ $x = 1$ 时，二次函数有最大值，

∴ $ax^2 + bx + c \leq a + b + c$ ，

∴ $ax^2 + bx \leq a + b$ ，所以③正确；

∵ 直线 $y = -x + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 C, D 两点， D 点在 x 轴下方且横坐标小于 3，

∴ $x = 3$ 时，一次函数值比二次函数值大，

即 $9a + 3b + c < -3 + c$ ，

而 $b = -2a$,

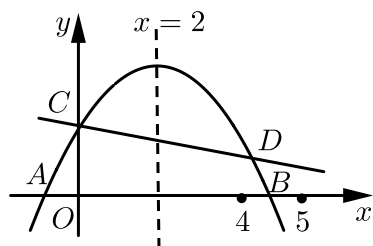
$\therefore 9a - 6a < -3$, 解得 $a < -1$, 所以④正确.

故选: D.

【标注】【知识点】一次函数与二次函数图象的综合判断

26. 2020年广东汕头金平区初三中考一模第10题3分 ★★★

如图, 二次的数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像与 x 轴交于 A 、 B 两点, 点 B 位于 $(4, 0)$ 、 $(5, 0)$ 之间, 与 y 轴交于点 C , 对称轴为直线 $x = 2$, 直线 $y = -x + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 C 、 D 两点, D 点在 x 轴上方且横坐标小于 5, 则下列结论: ① $4a + b + c > 0$; ② $a - b + c < 0$; ③ $m(am + b) < 4a + 2b$ (其中 m 为任意实数); ④ $a < -1$, 其中正确的是 ().



A. ①②③④

B. ①②③

C. ①②④

D. ①③④

【答案】 C

【解析】 $\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,

$\therefore c > 0$,

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$,

$\therefore b = -4a$,

$\therefore 4a + b + c = 4a - 4a + c = c > 0$, 所以①正确;

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$, 与 x 轴的一个交点 B 位于 $(4, 0)$ 、 $(5, 0)$ 之间,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点位于 $(0, 0)$ 、 $(-1, 0)$ 之间,

即当 $x = -1$ 时, $y < 0$, 也就是 $a - b + c < 0$, 因此②正确;

$\because$ 对称轴为 $x = 2$,

$\therefore x = 2$ 时的函数值大于或等于 $x = m$ 时函数值, 即, 当 $x = 2$ 时, 函数值最大,

$\therefore am^2 + bm + c \leq 4a + 2b + c$,

即, $m(am + b) \leq 4a + 2b$. 因此③不正确;

$\because$ 直线 $y = -x + c$ 与抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 交于 C 、 D 两点, D 点在 x 轴上方且横坐标小于 5,

$\therefore x = 5$ 时, 一次函数值比二次函数值大,

即 $25a + 5b + c < -5 + c$,

而 $b = -4a$,

$\therefore 25a - 20a < -5$, 解得 $a < -1$, 因此④正确;

综上所述, 正确的结论有①②④,

故答案选: C.

【标注】【知识点】根据二次函数图象判断参数符号

三、二次函数其它综合

练习10

27. 2019~2020学年10月广东广州越秀区明德实验学校初三上学期月考第14题3分 ★★

若抛物线 $y = x^2 + (a+1)x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$ 恒过一个定点, 求出该定点坐标为 _____.

【答案】 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

【解析】 $y = x^2 + (a+1)x + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}$
 $= x^2 + x + \frac{1}{4} + a\left(x + \frac{1}{2}\right)$
 $= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{2}\right),$
当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $y = 0$,
 $\therefore$ 该定点坐标为 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

【标注】【知识点】点在二次函数图象上

28. ★★★

二次函数 $y = ax^2 - 2ax - 1 + a$ ($a \neq 0$) 恒过一定点, 该定点坐标为 _____.

【答案】 $(1, -1)$

【解析】 $\because y = ax^2 - 2ax - 1 + a = a(x-1)^2 - 1,$
 $\therefore$ 不论 a 取任何不为 0 的实数, 当 $x = 1$ 时, $y = -1$,
即二次函数恒过的定点为 $(1, -1)$,
故答案为: $(1, -1)$.

【标注】【知识点】二次函数与定点问题

29. ★★

已知抛物线 $y = kx^2 + (2k+1)x + 2$ 恒过定点，请直接写出定点坐标 _____ .

【答案】 (0, 2)、(-2, 0)

【解析】 依题意得 $kx^2 + (2k+1)x + 2 - y = 0$ 恒成立，即 $k(x^2 + 2x) + x - y + 2 = 0$ 恒成立，

$$\text{则 } \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}.$$

所以该抛物线恒过定点 (0, 2)、(-2, 0) .

故答案为：(0, 2)、(-2, 0) .

【标注】【知识点】二次函数与定点问题

练习11

30. 2017年天津河西区初三中考二模第12题3分 ★★★★★

在平面直角坐标系中，点 A 的坐标是 (0, 2) . 在 x 轴上任取一点 M，连接 AM，作线段 AM 的垂直平分线 l_1 ，过 M 点作 x 轴的垂线 l_2 ，交 l_1 于 P，设 P 点坐标为 (x, y)，则 x 与 y 满足的关系式为 () .

- A. $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ B. $y = \frac{1}{4}x^2$ C. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ D. $y = \frac{1}{2}x^2$

【答案】 A

【解析】 如图所示，

连接 AP，过点 A 作

$AN \perp PM$ ，

$\because BP$ 是 AM 的垂直平分线，

$\therefore AP = PM = y$ ，

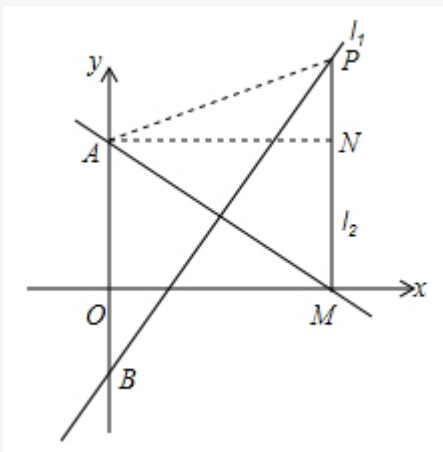
$\because PM \perp x$ 轴，

$\therefore AN = x$ ， $P(x, y)$ ，

$PN = y - 2$ ，

$\therefore AN^2 + PN^2 = AP^2$ ，即 $x^2 + (y - 2)^2 = y^2$ ，即 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ，

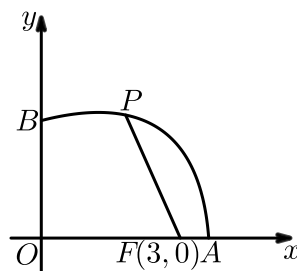
故选 A .



【标注】【题型】图象与系数的关系

31. 2018~2019学年北京东城区北京文汇中学初二下学期期中初二期中考试试卷第10题3分 ★★★★★

如图所示，已知点 F 的坐标为 $(3, 0)$ ，点 A 、 B 分别是某函数图象与 x 轴、 y 轴的交点，点 P 是此图象上的一动点，设点 P 的横坐标为 x ， PF 的长为 d ，且 d 与 x 之间满足关系式： $d = 5 - \frac{3}{5}x (0 \leq x \leq 5)$ ，给出以下四个结论：① $AF = 2$ ；② $BF = 5$ ；③ $OA = 5$ ；④ $OB = 3$ 。其中正确结论的序号是 ()。



A. ①②③

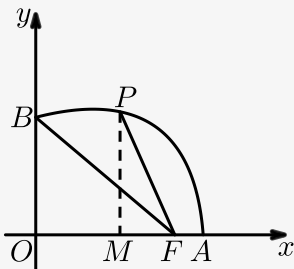
B. ①②③④

C. ②③④

D. ①②

【答案】 A

【解析】 过 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M ，如图所示，



设 P 的坐标是 (x, y) ，直角 $\triangle PMF$ 中， $PM = y$ ， $MF = 3 - x$ ，

$$PM^2 + MF^2 = PF^2,$$

$$(3 - x)^2 + y^2 = \left(5 - \frac{3}{5}x\right)^2,$$

$$\text{解得：} y^2 = -\frac{16}{25}x^2 + 16,$$

在上式中，令 $y = 0$ ，解得： $x = 5$ ，

则 $AF = OA - OF = 5 - 3 = 2$ ，故①、③正确；

在上式中，令 $x = 0$ ，解得， $y = 4$ ，即 $OB = 4$ ，故④错误；

在直角 $\triangle OBF$ 中，根据勾股定理即可求得： $BF = 5$ ，故②正确。

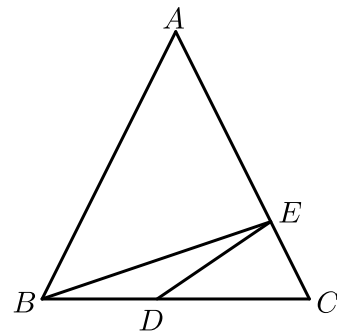
综上，正确的序号有①②③。

故选 A。

【标注】【知识点】由动点判断函数图象

32. ★★

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 6$ ， E 为 AC 边上的点且 $AE = 2EC$ ，点 D 在 BC 边上且满足 $BD = DE$ ，设 $BD = y$ ， $S_{\triangle ABC} = x$ ，则 y 与 x 的函数关系式为 ()。



A. $y = \frac{1}{810}x^2 + \frac{5}{2}$

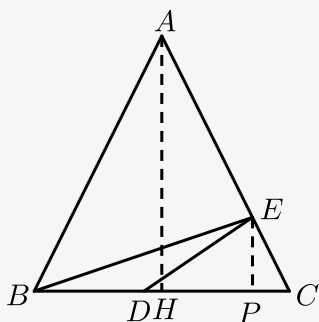
B. $y = \frac{2}{405}x^2 + \frac{5}{2}$

C. $y = \frac{1}{810}x^2 + 2$

D. $y = \frac{2}{405}x^2 + 2$

【答案】 A

【解析】 如图，过 A 作 $AH \perp BC$ ，过 E 作 $EP \perp BC$ ，则 $AH \parallel EP$ ，



$$\therefore HC = 3, PC = 1, BP = 5, PE = \frac{1}{3}AH,$$

$$\therefore BD = DE = y,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle EDP \text{ 中, 有 } y^2 = (5 - y)^2 + PE^2,$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \times 6AH = 3AH,$$

$$\therefore PE = \frac{1}{3} \times \frac{x}{3} = \frac{x}{9},$$

$$\therefore y^2 = (5 - y)^2 + \left(\frac{1}{9}x\right)^2,$$

$$\therefore y = \frac{1}{810}x^2 + \frac{5}{2},$$

故选 A.

【标注】【知识点】二次函数的几何问题